EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….004

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze lungimea segmentului AB, dacă $A(-5,3)$ și $B(2,1)$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $M(3,-2)$ la dreapta $3x-4y+2=0$.

(4p) **c)** Să se determine modulul numărului complex $z=(3-4i)(1+i)$.

(4p) **d)** Să se determine punctele de intersecție dintre dreapta $x-y=0$ și cercul $x^2+y^2=4$.

(2p) **e)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe

$\left(1-i\sqrt{3}\right)^3=a+ib$.

(2p) **f)** Să se determine $\cos(2007\pi)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze suma $1+4+7+10+...+100$.

(3p) **b)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{R}$ ecuația $x^3+x-2=0$.

(3p) **c)** Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $x^2+x-6\le 0$.

(3p) **d)** Să se determine al cincilea termen al dezvoltării $\left(2x+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$.

(3p) **e)** Să se rezolve în intervalul $\left(\sqrt{5},\infty\right)$, ecuația $\log_2\left(x^2-5\right)=2$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}, \forall x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$.

(3p) **a)** Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}, \forall x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0\}$.

(3p) **b)** Să se determine ecuațiile asimptotelor verticale la graficul funcției f.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot f(x)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\,dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma $S=f(1)+f(2)+...+f(2007)$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru o matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{C})$ notăm $tr(A)=a+d$ şi considerăm polinomul ataşat matricei A , $f=X^2-tr(A)\cdot X+\det(A)$. Notăm cu $x_1,x_2\in\mathbf{C}$ rădăcinile polinomului f şi considerăm matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A-xI_2=\begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$, $\forall x\in\mathbf{C}$.

(4p) **b)** Să se arate că $f(x)=\det(A-xI_2)$, $\forall x\in\mathbf{C}$.

(4p) **c)** Să se verifice că $x_1+x_2=tr(A)$ şi $x_1\cdot x_2=\det(A)$.

(2p) **d)** Să se arate că polinomul ataşat matricei I_2 are rădăcinile $x_1=1$ şi $x_2=1$.

(2p) **e)** Să se verifice că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$ şi

$A^{n+2}-(a+d)A^{n+1}+(ad-bc)A^n=O_2$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că polinomul ataşat matricei A^n are rădăcinile $x_1^{\,n}$ şi $x_2^{\,n}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă matricea A verifică $|tr(A)|>2$, atunci $A^n\neq I_2$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_n=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-...+\frac{(-1)^n}{3n+1}$ şi funcțiile

$f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-...+\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$, $n\in\mathbf{N}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $a_0=1$ şi $f_0(x)=x$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{x^4}$.

(4p) **c)** Să se determine $f_n'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se arate că $f_n'(x)=\frac{1}{1+x^3}-(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+3}}{1+x^3}$, $\forall\, x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

(2p) **e)** Să se arate că $\int_0^1\frac{1}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

(2p) **f)** Să se arate că $a_n=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{1+x^3}dx$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

(2p) **g)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.